Επίλυση μη Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων

Μέθοδος Newton-Raphson

Μη Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων

f(**x**) = **0**

Το παραπάνω σύστημα αναλύεται ως:

$$\left\| \begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, .., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

Μη Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων

Από το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης στο σημείο $x^{(0)}$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}) \approx \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s}$$

όπου $\mathbf{J_f}(\mathbf{x})$ είναι η Ιακωβιανή μήτρα:

$$\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\}_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{f_i}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$$

και **s** το διάνυσμα διόρθωσης: $\mathbf{s} = \mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)} =$

$$\begin{gathered} s_1^{(0)} = x_1 - x_1^{(0)} \\ s_2^{(0)} = x_2 - x_2^{(0)} \\ \vdots \\ s_n^{(0)} = x_n - x_n^{(0)} \end{gathered}$$

Μη Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων

Έτσι προκύπτει η σχέση $\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(0)} \\ s_2^{(0)} \\ \vdots \\ s_n^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \\ f_2\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \end{bmatrix}$$

Μη Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων

Το ζητούμενο σε ένα μη γραμμικό σύστημα της μορφής f(x) = 0 είναι η επίλυση της:

$$\mathbf{s} = -J^{-1}\mathbf{f}$$

Αλγόριθμος Επίλυσης

INPUT:

Η αρχική προσέγγιση $\boldsymbol{x_0}$*,*
ανοχή TOL,
μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N_{max}*.*

OUTPUT:

Προσεγγιστική λύση $\boldsymbol{x_k}$ *ή μήνυμα αποτυχίας.*

Step 1. *Set k=1*
Step 2. *While* $k<N_{max}$ *do Steps 3-6.*
Step 3. Μετατροπή στο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα του βήματος k: $\boldsymbol{J_f(x_k)s_k = -f(x_k)}$ και επίλυση ως προς το διάνυσμα διόρθωσης $\boldsymbol{s_k}$ με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss. Ο στόχος είναι το $\boldsymbol{s_k} \rightarrow \mathbf{0}$
Step 4. Έλεγχος για το βήμα $||\boldsymbol{s_k}|| < Tol$*, αν ναι τότε OUTPUT (διάνυσμα ρίζας =* $\boldsymbol{x_k} + \boldsymbol{s_k}$*)*
Step 5. Επόμενο βήμα $k = k + 1$
Step 6. Θέσε $\boldsymbol{x_k}=\boldsymbol{x_{k+1}}$
Step 7. *OUTPUT ("Αποτυχία μεθόδου")*

Υπολογισμός της Ιακωβιανής $J_f(x_k)$

$$
\mathrm{J_f(xk)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}
$$

Υπολογισμός της Ιακωβιανής $J_f(x_k)$

Να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός της Ιακωβιανής γίνεται σε κάθε βήμα k για τις νέες τιμές του διάνυσματος των υποψήφιων ριζών $\mathbf{x}_k$

Η μερική παράγωγος $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ για τη γραμμή i και την κολώνα j θα υπολογιστεί από την κεντρική διαφορά:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f(x_1,x_2,..,xj_{-1},x_j+\Delta h,xj_{+1},..,xn)_i - f(x_1,x_2,..,xj_{-1},x_j-\Delta h,xj_{+1},..,xn)_i}{2\Delta h}$$

Υπολογισμός της αντίστροφης Ιακωβιανής $J^{-1}{}_k(x_k)$

Σε κάθε βήμα k του κύκλου επίλυσης θα πρέπει να επαναλαμβάνεται η επίλυση του συστήματος $\boldsymbol{J_f(x_k)s_k = -f(x_k)}$, *δηλαδή του* $\boldsymbol{s_k = -\, J_f(x_k)^{-1} f(x_k)}$

Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και οι βελτιώσεις της μεθόδου επίλυσης Newton – Raphson στηρίζονται στον υπολογισμό της αντίστροφης Ιακωβιανής με επαναληπτικό τρόπο.

Στο παράδειγμα μας υπολογίζουμε απευθείας τις ρίζες, επιλύοντας το γραμμικό σύστημα.